Über das Gesetz der rationalen Verhältnisse der Tangenten tautozonaler Krystallkanten.

Von Dr. Victor v. Lang.

Das Grundgesetz der Krystallographie, das Gesetz, dass die Indices jeder Krystallfläche sich wie rationale Zahlen verhalten, erfordert bekanntlich, dass man als Axenrichtungen die drei Kanten wähle, in denen sich drei beliebige Krystallflächen schneiden, zu Axenlängen aber die Abschnitte einer vierten Fläche auf diesen Axenrichtungen nehme. Es wird ferner als Thatsache der Erfahrung angenommen, dass alle Flächen, welche dem eben erwähnten Gesetze genügen, noch einem zweiten unterworfen sind, welches besagt, dass die Tangenten tautozonaler Kanten sich ebenfalls wie rationale Zahlen verhalten. Damit jedoch auch dieses Gesetz bestehe, müssen die nach dem ersten bestimmten Elemente (Axenrichtungen und Axenlängen) eines Krystalles noch gewisse Bedingungen erfüllen, welche zuerst ganz allgemein von Naumann abgeleitet wurden. Wie im Nachfolgenden gezeigt werden soll, lassen sich aus diesem Gesetze auch noch andere Folgerungen ziehen, welche vielleicht nicht ganz uninteressant sind, und die dazu beitragen, die Bedeutung des Gesetzes, aus dem sie sich ergeben, besser beurtheilen zu können. Der Vollständigkeit halber sollen jedoch zuerst einige schon grösstentheils bekannte Sätze entwickelt werden.

Die beiden Gesetze werde ich zur Abkürzung in der Ordnung, wie ich sie angeführt, blos als erstes und zweites Gesetz bezeichnen.

---

1. Das zweite Gesetz lässt sich auch so aussprechen: Die Tangenten aller Kanten einer und derselben Zone sind rationale Vielfache derselben Grösse; diese Grundgrösse ist natürlich für ver-

schiedene Zonen verschieden und ist im Allgemeinen irrational. Offenbar sind beide Ausdrucksweisen identisch.

2. Sind P, Q, R die Pole [1]) dreier tautozonaler Flächen, welche dem zweiten Gesetze genügen, so hat man zufolge 1 die Gleichungen

$$\tan PQ = mT,\ \tan QR = nT,\ \tan PR = pT,$$

wobei m, n, p rationale Zahlen sind. Die ersten zwei dieser Gleichungen geben

$$\frac{\tan PQ}{\tan QR} = \frac{m}{n}$$

die letzte Gleichung aber, da $PR = PQ + QR$ ist,

$$\tan PQ . \tan QR = \frac{p-m-n}{p}.$$

Multiplicirt man diese beiden neuen Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\tan PQ^2 = \frac{m}{np}(p-m-n)$$

und hieraus

$$T = \sqrt{\frac{p-m-n}{np}}.$$

Wie man aus der letzten Gleichung ersieht, lässt sich die irrationale Grundgrösse T als Quadratwurzel darstellen.

3. Man kann daher das zweite Gesetz auch in folgender Form, wie es Neumann [2]) gethan hat, aufstellen: Die Tangenten tautozonaler Kanten sind rationale Vielfache einer und derselben Quadratwurzelgrösse, welche im Allgemeinen für jede Zone einen verschiedenen Werth hat.

4. Sind nun α und γ die Grössen zweier ganz beliebiger tautozonaler Kanten, so kann man zufolge des eben Gesagten, unter q, r, L rationale Grössen verstanden, setzen

$$\tan \alpha = q\sqrt{L}\ .\ \tan \gamma = r\sqrt{L},$$

hieraus folgt

$$\tan(\alpha \pm \gamma) = \frac{q \pm r}{1 \mp qrL}\sqrt{L}.$$

---

[1]) Im Nachfolgenden werden blos die Winkel betrachtet, welche die Normalen der Flächen einschliessen, und welches die Supplemente der Kantenwinkel sind; die Giltigkeit dieser Sätze für beiderlei Winkel ist einleuchtend.

[2]) Neumann, Beiträge zur Krystallonomie. Heft I, 1823, S. 19.

Diese Gleichung besagt, dass auch die Tangenten der Summen und Differenzen zweier tautozonaler Kantenwinkel rationale Vielfache der dieser Zone entsprechenden Quadratwurzel sind. Dieser Satz lässt sich eben so leicht auf die Summen und Differenzen beliebig vieler tautozonaler Kantenwinkel ausdehnen. Die nachfolgenden Sätze 5 und 6 gelten daher auch für solche Summen und Differenzen.

5. Aus den vorhergehenden Gleichungen folgt ferner, dass auch die Ausdrücke

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\gamma},\ \tan\alpha\tan\gamma,\ \tan\alpha^2$$

rational sind. Aus dem letzten Ausdrucke ergibt sich aber leicht nach bekannten goniometrischen Formeln, dass auch

$$\sin\alpha^2,\ \cos\alpha^2,\ \cot\alpha^2$$

rational sein müssen. Man kann daher sagen: Die goniometrischen Functionen irgend einer Krystallkante lassen sich durch Quadratwurzeln ausdrücken, wobei selbstverständlich rationale Werthe nicht ausgeschlossen sind.

6. Man hat allgemein die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2.$$

Stellt nun α die Grösse einer Krystallkante dar, so ist zufolge des vorhergehenden Satzes $\cos 2\alpha$ rational. Es ist daher auch der Cosinus einer Kante, welche möglicherweise durch eine Krystallfläche gerade abgestumpft werden kann, rational, da dieselbe alsdann aus zwei gleichen Winkeln besteht. Die Cosinusse der Kanten eines Rhomboëders, einer rhombischen Pyramide u. s. w. sind daher rationale Grössen.

7. Die Flächen einer Zone genügen aber auch schon dem zweiten Gesetze, wenn die Tangenten der Winkel, welche blos eine Fläche mit den übrigen tautozonalen Flächen einschliesst, rationale Vielfache derselben Quadratwurzelgrösse sind. Denn alle übrigen Kantenwinkel dieser Zone lassen sich als Summen oder Differenzen der ersteren Winkel auffassen, und folglich ist es leicht zu zeigen, dass ihre Tangenten ebenfalls rationale Vielfache derselben Quadratwurzel sind.

8. Hat man daher eine Anzahl tautozonaler Flächen, welche dem zweiten Gesetze genügen und die daher Kanten bilden, deren

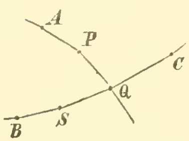
Tangenten rationale Vielfache einer und derselben Quadratwurzel z. B. $\sqrt{L}$ sind, so genügt auch eine neue Fläche S in dieser Zone dem zweiten Gesetze, wenn sie mit einer der ersteren Flächen z. B. P einen Winkel einschliesst, dessen Tangente ebenfalls ein rationales Vielfache von $\sqrt{L}$ ist. Denn alsdann sind die Tangenten aller Winkel, welche P mit den übrigen Flächen, S mit inbegriffen, bildet, rationale Vielfache einer und derselben Quadratwurzel, daher nach 7 alle Flächen dieser Zone dem zweiten Gesetze genügen.

9. Die neu hinzutretende Fläche S genügt auch dann nach dem zweiten Gesetze, wenn sie mit der Fläche P einen Winkel $\alpha = 90^0$ einschliesst. Die Richtigkeit dieses Satzes ist zufolge 8 leicht einzusehen, da

$$\tan \alpha = \infty = \infty \sqrt{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist, die Grösse ∞ aber in dem letzten Producte als rational zu betrachten ist, daher in verschiedenen Krystallzonen Kantenwinkel gleich 90^0 beobachtet werden.

10. Sind die Elemente eines Flächencomplexes derart bestimmt, dass jede Fläche, die zufolge des ersten Gesetzes möglich ist, auch dem zweiten genügt, so findet auch das Umgekehrte Statt, wie sich folgendermassen zeigen lässt.



Sind A, B, C, P vier der gegebenen Flächen, die Fläche S aber so beschaffen, dass sie mit B und C dem zweiten Gesetze genügt, so soll nachgewiesen werden, dass unter obiger Voraussetzung die Indices der Fläche S sich wie rationale Zahlen verhalten. Die Richtungen der Axen sollen bestimmt werden durch die Durchschnitte der Flächen A, B, C, die entsprechenden Axenlängen a, b, c aber durch die Fläche P. Zieht man den Zonenkreis AP, so stellt der Durchschnittspunkt Q der beiden Kreise AP und BC nach einem bekannten Lehrsatze der Krystallographie den Pol einer Fläche dar, welche dem ersten Gesetze genügt; da angenommen wurde, dass jede solche Fläche auch dem zweiten Gesetze gehorche, so muss auch für die drei Flächen B, Q, C dieses Gesetz bestehen.

Für die Symbole der einzelnen Flächen kann man nun nach dem Vorhergehenden setzen

$$A(100),\ B(010),\ C(001).\ P(111),\ Q(011),\ S(okl)$$

Für den Pol S hat man allgemein die Gleichung [1])

$$\frac{k}{l} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin AB}{\sin AC} \cdot \frac{\sin CS}{\sin BS}$$

und da $CS = BC - BS$ ist, so wird diese Gleichung

$$\frac{k}{l} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin AB}{\sin AC} \cdot \cos BC \left(\frac{\tan BC}{\tan BS} - 1\right),$$

welche für den Pol Q übergeht in

$$1 = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin AB}{\sin AC} \cdot \cos BC \left(\frac{\tan BC}{\tan BQ} - 1\right).$$

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man

$$\frac{k}{l} = \left(\frac{\tan BC}{\tan BS} - 1\right) : \left(\frac{\tan BC}{\tan BQ} - 1\right).$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber zufolge des Vorhergehenden rational, daher also auch das Verhältniss von k zu l und somit alle drei Indices der Fläche S rational, was zu beweisen war.

Es ist somit auch gezeigt, dass bei Krystallen, bei denen je die Elemente erfahrungsgemäss so beschaffen sind, dass ihre Flächen beiden Gesetzen gehorchen, jede Fläche, welche in einer Zone so gelegt werden kann, dass sie dem zweiten Gesetze genügt, auch das erste erfüllt, und somit eine mögliche Krystallfläche ist.

Aus der letzten Gleichung ersieht man aber zugleich, dass eine neue Fläche S nur dann dem zweiten Gesetze genügen kann, wenn ihre Indices sich in der That wie rationale Zahlen verhalten.

11. Denkt man sich in irgend einer Zone eines Krystalles zu einer Fläche desselben eine darauf senkrechte gelegt, so ist auch dies eine mögliche Krystallfläche, denn zufolge 9 genügt diese Fläche dem zweiten Gesetze, jede solche Fläche aber ist nach 10 eine mögliche Krystallfläche.

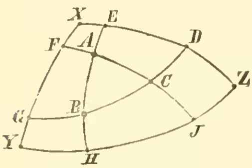
12. Es ergibt sich aus dem letzten Satze leicht, dass sich jeder Krystall wenigstens auf ein monoklinoëdrisches Axensystem beziehen lassen muss. Jede Krystallfläche liegt nämlich wenigstens in zwei Zonen; betrachtet man nur eine bestimmte Fläche, so ist in jeder der beiden Zonen, in welchen sie liegt, eine Fläche vorhanden oder

---

[1]) Miller, Lehrbuch der Krystallographie, übersetzt von Grailich. Wien 1856, S. 148.

nach 11 wenigstens möglich, welche zu derselben senkrecht steht. Bestimmt man durch diese drei Flächen die Axenrichtungen, so erhält man drei Axen, von denen eine auf den beiden anderen senkrecht steht, welche also einem monoklinoëdrischen Axensysteme entsprechen.

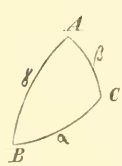
13. Jede Fläche, welche auf einer Krystallkante senkrecht steht, ist ebenfalls eine mögliche Krystallfläche.



Sind A, B, C die Pole dreier Flächen, so stellen die Pole X, Y, Z der Zonenkreise BC, CA, AB die Punkte dar, in denen die Durchschnittslinien der drei Flächen die Sphäre der Projection treffen. Man findet aber die Punkte X, Y, Z, wenn man sich zu dem Dreiecke ABC das Polardreieck XYZ construirt. Es soll nun gezeigt werden, dass die Flächen, die senkrecht auf den Kanten der Flächen A, B, C stehen, deren Pole also X, Y, Z mögliche Krystallflächen sind. In der Zone BC ist der Construction zufolge $BD = 90^0$, nach dem Satz 11 sind daher D und ebenso E, F, G, H, J die Pole möglicher Krystallflächen. X, Y, Z sind nun die Durchschnittspunkte von Zonenkreisen, die durch mögliche Flächen gelegt sind, sie stellen daher die Pole von ebenfalls möglichen Krystallflächen vor und es ist somit obiger Satz bewiesen.

Jede Krystallkante ist nach diesem zugleich Normale auf einer möglichen Krystallfläche, und umgekehrt, da ja A, B, C auch die Endpunkte der Kanten der Flächen X, Y, Z sind. Man kann folglich als Krystallaxen auch die Richtungen der Normalen dreier Krystallflächen nehmen.

14. Jeder ebene Winkel eines Krystalles kann statt als Winkel zweier Kanten zufolge des letzten Satzes auch als Neigungswinkel zweier Krystallflächen aufgefasst werden. Es müssen sich daher zufolge 5 die goniometrischen Functionen auch der ebenen Krystallwinkel in Form von Quadratwurzeln darstellen lassen.



15. Stellen in dem sphärischen Dreiecke ABC die Eckpunkte die Pole dreier Krystallflächen vor; so sind die Winkel A, B, C die Supplemente der Winkel, welche die Kanten der drei Flächen einschliessen; α, β, γ aber sind die Neigungswinkel

dieser Flächen zu einander. Man hat nun allgemein die Gleichung

$$\cos B \cos C = \cos \alpha \sin B \sin C - \cos A;$$

quadrirt man diese Gleichung, so findet man hieraus leicht

$$\cos \alpha \cos A \sin B \sin C = \tfrac{1}{2} \{\cos \alpha^2 \sin B^2 \sin C^2 + \cos A^2 - \cos B^2 \cos C^2\};$$

im rechten Theile dieser Gleichung sind die Quadrate zufolge 5 und 14 alle rational, es sind daher auch die Producte

$$\begin{gathered}\cos \alpha \cos A \sin B \sin C\\ \cos \beta \cos B \sin C \sin A\\ \cos \gamma \cos C \sin A \sin B\end{gathered}$$

rational, indem der Beweis für die letzten zwei Producte sich schon aus der Symmetrie der Buchstaben ergibt. Eben so leicht beweist man die Rationalität der folgenden Ausdrücke:

$$\begin{gathered}\cos \alpha \cos A \sin \beta \sin \gamma\\ \cos \beta \cos B \sin \gamma \sin \alpha\\ \cos \gamma \cos C \sin \alpha \sin \beta.\end{gathered}$$

Die vorhergehende Gleichung kann man auch so schreiben

$$\cos A + \cos B \cos C = \cos \alpha \sin B \sin C,$$

quadrirt man nun wieder, so findet man, dass das Product

$$\cos A \cos B \cos C$$

rational sein muss; auf ähnliche Weise ersieht man, dass auch

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

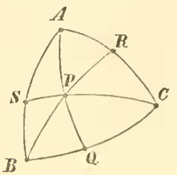
rational ist.

16. Um die Bedingungen zu finden, welche die nach dem ersten Gesetze bestimmten Elemente erfüllen müssen, damit auch das zweite Gesetz bestehe, drückt Naumann [1]) zuerst die Tangenten zweier tautozonaler Kanten durch die Elemente und die Indices aus und untersucht nun, unter welchen Bedingungen das Verhältniss dieser Tangenten rational wird. Etwas einfacher würde sich die Rechnung gestalten, wenn man, statt das zweite Gesetz in seiner ursprünglichen Form anzuwenden, eine der Folgerungen daraus benützte und etwa untersuchte, unter welchen Bedingungen das Quadrat des Cosinus einer beliebigen Kante, wie es Satz 5 erfordert, rational wird. Leicht

---

[1]) Naumann, Über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. Abhandl. der k. sächsischen Gesell. d. Wissensch. Bd. IV (1855), S. 507.

ergeben sich diese Bedingungen auch mit Hilfe der sphärischen Krystallographie, wie nun gezeigt werden soll.



Es seien A, B, C, P die Pole der Krystallflächen

$A(100)$, $B(010)$, $C(001)$, $P(hkl)$,

a, b, c die Längen der entsprechenden Axen, und wie früher $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$. Die beiden Zonenkreise AP und BC schneiden sich in dem Punkte Q, dem Pole von (okl). Da jede nach dem ersten Gesetze mögliche Fläche auch dem zweiten gehorchen soll, so müssen auch B, Q, C dem zweiten Gesetze genügen. Allgemein hat man nun für Q wie früher die Gleichung

$$\frac{k}{l} = \frac{b}{c} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin QC}{\sin QB};$$

bemerkt man, dass $\alpha = BQ + QC$ ist, so findet man hieraus leicht

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{k}{l}\left(\frac{\tan\alpha}{\tan QC} - 1\right).$$

Da im rechten Theile dieser Gleichung die Verhältnisse $\frac{k}{l}$ und $\frac{\tan\alpha}{\tan QC}$ rational sind, so muss auch der linke Theil rational sein. Ähnliche zwei Gleichungen erhält man, wenn man die Zonenkreise BP und PC zieht und die Flächen R und S betrachtet.

Es müssen daher folgende drei Ausdrücke

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{1}{\cos\beta}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}$$

rational sein. Quadrirt man diese Ausdrücke, so findet man, zufolge 5, dass auch $\frac{b^2}{c^2}$, $\frac{c^2}{a^2}$, $\frac{a^2}{b^2}$ rational sind. Da man eine der Axenlängen beliebig gross, also auch rational annehmen kann, so folgt hieraus, dass auch die Axenlängen eines Krystalles sich zufolge des zweiten Gesetzes durch Quadratwurzel müssen darstellen lassen; auch hier sind natürlich rationale Zahlwerthe nicht ausgeschlossen. Man kann daher die Quadrate der Axenlängen als rational betrachten.

Multiplicirt man die letzten Ausdrücke der Reihe nach mit den rationalen Grössen

$$c^2 \sin\beta^2 \cos\alpha^2, \; a^2 \sin\gamma^2 \cos\beta^2, \; b^2 \sin\alpha^2 \cos\gamma^2,$$

so erhält man die Producte

$$bc \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha$$
$$ca \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta$$
$$ab \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma,$$

welche daher ebenfalls rational sind. Diese Bedingungen, welche die Elemente eines Krystalles erfüllen müssen, erhalten die einfachste Form, wenn man sie der Reihe nach mit den nach 15 rationalen Producten $\cos\alpha \cos A \sin\beta \sin\gamma$, $\cos\beta \cos B \sin\gamma \sin\alpha$, $\cos\gamma \cos C \sin\alpha \sin\beta$ multiplicirt. Man sieht alsdann, dass zufolge 5 und 14 auch die Ausdrücke

$$bc \cos A,\ ac \cos B,\ ab \cos C$$

rational sein müssen. Multiplicirt man endlich diese Ausdrücke der Reihe nach mit den rationalen Producten

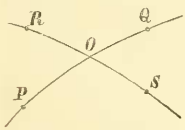
$\cos\alpha \cos A \sin B \sin C$, $\cos\beta \cos B \sin C \sin A$, $\cos\gamma \cos C \sin A \sin B$,

so zeigt sich, dass auch die Ausdrücke

$$bc \cos\alpha \sin B \sin C$$
$$ca \cos\beta \sin C \sin A$$
$$ab \cos\gamma \sin A \sin C$$

rationale Werthe haben; dieses sind aber dieselben Bedingungen für Elemente eines Krystalles, zu welchen Naumann [1]) auf dem vorher bezeichneten Wege gelangte.

17. Wie aus dem Vorhergehenden und vorzüglich aus dem Satze 10 hervorgeht, greifen die beiden Gesetze theilweise in einander über, und es liegt daher der Gedanke nahe, einen einzigen Lehrsatz aufzustellen, welcher den beiden Gesetzen äquivalent ist. Ein solcher Satz, welchen man vielleicht das Gesetz der vier Krystallflächen nennen könnte, ist folgender. Sind P, Q, R, S die Pole von vier Krystallflächen, unter denen höchstens zwei parallele [2]) sein dürfen, und



legt man durch je zwei dieser Pole Zonenkreise, etwa durch P, Q und R, S, welche sich in O schneiden, so verhalten sich

$$\tan PQ,\ \tan PO,\ \tan OQ$$

so wie drei rationale Zahlen. Eine ähnliche Proportion gilt auch für den andern Zonenkreis RS.

---

[1]) Um Irrungen zu vermeiden bemerke ich, dass Naumann zwar dieselben Buchstaben gebraucht, die Bedeutung der Buchstaben α, β, γ und A, B, C aber vertauscht ist.

[2]) In diesem Falle mussten die Zonenkreise so gezogen werden, dass keine der Zonen unbestimmt wird.

Es ist nun zu zeigen, erstens dass der aufgestellte Lehrsatz wirklich wahr ist, d. h. sich aus den beiden Gesetzen folgern lässt, und zweitens dass man auch umgekehrt die beiden aus demselben ableiten kann. Das erstere lässt sich leicht beweisen. Denn sind P, Q, R, S die Pole von vier Krystallflächen, so folgt aus dem ersten Gesetze, dass auch die Fläche, deren Pol der Durchschnittspunkt der beiden Zonen PQ und RS ist, demselben Gesetze gehorcht und also eine möglicherweise vorkommende Fläche ist; für die drei Krystallflächen P, O, Q, welche in einer Zone liegen, ergibt sich aus dem zweiten Gesetze sogleich die obige Proportion.

Diese Proportion muss aber auch dann noch gelten, wenn S schon ursprünglich in den Zonenkreis PQ zu liegen kommt und also mit O zusammenfällt. Man sieht hieraus, dass zufolge des aufgestellten Satzes für je drei Flächen einer Zone eine ähnliche Proportion gilt, und es ist leicht einzusehen, dass daher die Tangenten aller Kanten einer Zone sich wie rationale Zahlen verhalten. Es ist somit gezeigt, dass sich das zweite Gesetz aus dem obigen Satze herleiten lässt, und es bleibt noch übrig nachzuweisen, dass auch das erste in demselben enthalten ist. Dieser Beweis gestaltet sich aber ganz ähnlich, wie der des Satzes 10, indem man vier Flächen zur Bestimmung der Elemente wählt, und von jeder neu hinzutretenden zeigt, dass unter Voraussetzung des angenommenen Lehrsatzes ihre Indices sich wie rationale Zahlen verhalten müssen.

Der aufgestellte Satz fasst nun wirklich beide Gesetze in eines zusammen, doch ist er nicht verwickelter als dieselben, im Gegentheile erweist er sich darin einfacher, dass er sich blos auf je vier Flächen bezieht, während das erste Gesetz wenigstens fünf verschiedene Flächen voraussetzt. Man hat ferner nicht nöthig, wenn man die Grundgesetze der Krystallographie in dieser Form aufstellt, die Definition von Krystallaxen und Axenlängen vorauszuschicken: insoferne von Vortheil, als dieselben doch eine untergeordnete Bedeutung haben, da es ja mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie wenigstens immer möglich ist das Krystallsystem, die Symbole aller Flächen und ihre Neigungen gegen einander zu bestimmen, ohne erst die Richtungen und Längen der Krystallaxen aufsuchen zu müssen.